DM02 opgaver ugeseddel 1

af Fiona Nielsen

Opdateret pr. 15. september 2003

1 Øvelsesopgaver 2/9, 3/9 og 4/9

Opgaver i mængdelære og logik

1. A og B er mængder. Find vha. Venn diagrammer og/eller lovene det simpleste udtryk for følgende.

   (a) $A - (A - B)$
   Brug lovene side 4 og 5 i noterne til at udlede de simplere udtryk.
   Tjek dine resultater med Venn diagrammer.
   Baggrundslæsning: kapitel 1.1 i Noter til DM02.

$$
\begin{array}{rcl}
A - (A - B) & = & A - (A \cap B') \\
\text{(s. 4 nederst)} & = & A \cap (A \cap B')' \\
(1.12) & = & A \cap (A' \cup (B')') \\
(1.13) & = & A \cap (A' \cup B) \\
(1.6) & = & (A \cap A') \cup (A \cap B) \\
(1.14) & = & \emptyset \cup (A \cap B) \\
(1.16) & = & A \cap B
\end{array}
$$

   (b) $A - (A \cap B) = A - B$

   (c) $(A \cup B) - A = B - A$

   (d) $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$

   (e) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$ Udledes nemt vha. DeMorgans love 1.11 og 1.12

   (f) $A \cup (B \cap (A - (B - A))) = A$

1. Hvilke af følgende udsagn er sande?

   (a) Hvis $1 + 1 = 2$, så er $2 + 2 = 4$.
   Omskriv sætningen til et udsagn af typen

   $$S : p \to q$$

   og evaluer sandhedsværdien af p,q og hele udsagnet S.
   Vælger $p : 1 + 1 = 2$ og $q : 2 + 2 = 4$, hermed får vi

   $$S : true \to true \equiv true$$

   som evaluerer til *true* ifølge definitionen af $\to$ (se noterne side 12 øverst).

   (b) $1 + 1 = 3$, kun hvis $2 + 2 = 6$.
   $p : 1 + 1 = 3$, $q : 2 + 2 = 6$

   $$S : false \to false \equiv true$$

   (c) $(1 = 2$ og $1 = 3)$, hvis og kun hvis $1 = 3$.
   $p : (1 = 2$ og $1 = 3)$, $q : 1 = 3$

   $$S : false \leftrightarrow false \equiv true$$

   Husk at: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

   (d) Hvis $1 + 1 = 3$, så er $1 + 2 = 3$.
   $p : 1 + 1 = 3$, $q : 1 + 2 = 3$

   $$S : false \to true \equiv true$$

   (e) Hvis $1 = 2$, så er $2 = 3$ og $2 = 4$.
   $p : 1 = 2$, $q : (2 = 3) \wedge (2 = 4)$

   $$S : false \to false \equiv true$$

   (f) Kun hvis $3 - 1 = 2$, er $1 - 2 = 0$.
   $p : 3 - 1 = 2$, $q : 1 - 2 = 0$

   $$S : q \to p \equiv false \to true \equiv true$$

   Bemærk den ændrede ordstilling vender udtrykket.
   Læs mere i noterne side 12 midt.

1. Skriv følgende udsagn på simplest mulig form.

   (a) $(p \to q) \land (p \to \neg q)$
   Udsagnene kan simplificeres vha. love ækvivalente med lovene for mængder beskrevet i noterne side 5. For en oversigt af love for logiske udtryk se side 24 i 'Rosen: Discrete Mathematics and its Applications', som findes på semesterhylden på Odense Matematiske Bibliotek (på Imada).

$$\begin{aligned}
(p \to q) \land (p \to \neg q) &\Leftrightarrow (\neg p \lor q) \land (p \to \neg q) \\
\text{implication def.} &\Leftrightarrow (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q) \\
\text{distributive law} &\Leftrightarrow \neg p \lor (q \land \neg q) \\
\text{negation law} &\Leftrightarrow \neg p \lor false \\
\text{identity law} &\Leftrightarrow \neg p
\end{aligned}$$

   Opgaverne kan også løses ved at opstille sandhedstabeller for udsagnet.

p	q	$p \to q$	$\land$	$p \to \neg q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

   Se flere eksempler s. 13 i noterne.

   (b) $p \lor (p \to q)$

$$p \lor (p \to q) \quad \Leftrightarrow \quad true$$

   (c) $p \land (p \to q)$

$$p \land (p \to q) \quad \Leftrightarrow \quad p \land q$$

   (d) $(p \to q) \land (\neg p \to q)$

$$(p \to q) \land (\neg p \to q) \quad \Leftrightarrow \quad q$$

   (e) $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

$$p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad q$$

Øvelsesopgaver 2/9, 3/9 og 4/9 (fortsat)

1. fortsat...

   (a) $q \wedge (p \to q)$

   $$q \wedge (p \to q) \quad \Leftrightarrow \quad q$$

2. Overvej sætningen "Everybody loves somebody sometime". For at være præcise lader vi $L(x, y, t)$ betegne, at x elsker y til tid t. Udtryk udsagnet vha. af L under brugen af kvantorer ($\forall$, $\exists$).

   Kvantorer gælder indenfor det udtryk de er en del af, dvs. kvantorernes rækkefølge har betydning.
   Se f.eks. på udtrykket

   $$\exists t : \exists y : \forall x : L(x, y, t)$$

   som oversættes til sætningen:

   "Der findes et tidspunkt hvor alle personer i verden elsker én bestemt (dvs. den samme) person".

   Hvilket <u>ikke</u> er vores ønskede sætning. Istedet bytter vi om på kvantorerne, så vi får løsningen:

   $$\forall x : \exists t : \exists y : L(x, y, t)$$

Opgaver i induktion

1. Bevis ved induktion, at $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

   Basis $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1$$

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

   OK

   Induktion $n \geq 1$
   Induktionsantagelse:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

   Ønsker at vise for k+1:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

   Udleder udtrykket:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

   OK

1. Løs opgave B.1-5 i Cormen et al. vha. induktion.

   Vis at for alle endelige mængder S har potensmængden 2^S, $2^{|S|}$ elementer.

   Basis $S = \emptyset, |S| = 0$

$$2^S = \{\emptyset\}, |2^S| = 1 = 2^0 = 2^{|S|}$$

   Induktion $|S| \geq 0$
   Induktionsantagelse:

$$|S_k| = k, |2^{S_k}| = 2^k$$

   Induktion:

$$|S_{k+1}| = k + 1$$

   For hvert sæt i 2^S kan der laves to nye delmængder: en mængde <u>med</u> det nye element , og en mængde <u>uden</u> det nye element. Altså har vi fordoblet antallet af delmængder.

$$|2^{S_{k+1}}| = |2^{S_k}| \cdot 2 = 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$$

   Formelt kan det skrives som:

$$2^{S_{k+1}} = \{S' \cup \{e_k + 1\} | S' \in 2^{S_k}\} \cup 2^{S_k}$$

   Hvor e_i er det i'te element der tilføjes (her: induktionsskridtet $k + 1$)

1. Overvej følgende “sætning”:

   Sætning 1 Alle æbler har samme farve.

   Bevis Ved induktion over antallet n af æbler.

   Basis ($n = 1$): Det er klart, at i en mængde af æbler, der består af kun ét æble, har alle æbler samme farve.

   Induktionsskridt ($n \geq 2$): Vi antager, at alle mængder af højst n æbler har samme farve og skal nu vise, at det også gælder for $n + 1$.

   Tag det $(n + 1)$'te æble fra. Per induktion har de resterende n æbler samme farve. Tag nu i stedet 1. æble fra. Per induktion har de resterende n æbler samme farve. Dvs. at æble 1 har samme farve som æblerne 2 til n, som igen har samme farve som æble $n + 1$. Altså har de alle samme farve.

   Svar

   Som du måske ved er det ikke sandt at alle æbler har samme farve. Så vores opgave går ud på at finde ud af hvor ovenstående induktionsbevis ikke holder *eller* også må vi tro på at alle æbler har samme farve.

   ...

   Heldigvis kan vi se at induktionsbeviset ikke er komplet; der er et hul i beviset, fra basistilfældet til det generelle tilfælde (induktionsskridtet).
   Basis for et induktionsbevis skal vises for et eller flere basistilfælde. Herefter skal induktionsskridtet baseres på ét eller flere af disse basistilfælde, således at beviset for alle skridt bygger på et sandt udsagn.
   I dette eksempel mangler der et basistilfælde for $n = 2$ *eller* induktionsskridtet skulle være startet fra $n \geq 1$. Det er nemt at se at hvis bare en af disse to nødvendige krav skal opfyldes er det ikke længere muligt at bevise ved induktion at alle æbler har samme farve.

2 Ordbog

Engelsk	Dansk	Symbol
union	foreningsmængde	$A \cup B$
intersection	fællesmængde	$A \cap B$
difference	differensmængde	$A - B$

3 Bemærkninger

Den komplementære mængde skrives som A' i noterne men som $\bar{A}$ på ugesedlen.

$$A' = \bar{A} = \{x \in U | x \notin A\}$$

Hvor U er den universelle mængde af alle elementer i vores kontekst.