Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

23. september 2003
finie02@imada.sdu.dk

DM02 – Opgaver til ugeseddel 3

Forelæsning 22/9

- Afslutning på asymptotisk notation.
- Del-og-hersk.
- Merge Sort (Cormen et al. Afsnit 2.3).
- Rekursionsligninger (Cormen et al. Afsnit 4.1–4.3).

Øvelsesopgaver 16/9, 17/9 og 18/9

1. Eksamen januar 03 opg. 1.
   Vi behandler ikke emnet korrekthedsbeviser helt så formelt som sidste år. Derfor skal I ikke give et formelt bevis i spm. a.

   (a) Vis at while-løkken terminerer
   Rent uformelt er det nok at pointere følgende:
   - i initialiseres til 1 udenfor løkken
   - løkken inkrementerer i ved hver gentagelse, dvs. i nærmer sig n for hver gentagelse
   - når $i = n$ stopper løkken

   Altså konkluderer vi at løkken terminerer.

   (b) Vis at følgende udsagn er en invariant for While-løkken.

   $$I : antal = |\{k \in \{1, 2, .., i-1\} | R(k-1) \neq R(k)\}|$$

   Vi skal vise at invarianten I:

   i. Gælder inden løkkens start
   ii. Gælder efter hver iteration af løkken

   Inden løkkens start
   Initialisering: $antal = 0,\ r = 1,\ i = 1$
   De initierede variable indsættes i invarianten I:

   $$\begin{aligned} I : antal &= |\{k \in \{1, .., 0\} | R(k-1) \neq R(k)\}| \\ &= |\{k \in \emptyset | R(k-1) \neq R(k)\}| \\ &= |\emptyset| \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Vi ser at invarianten gælder.
   For hver iteration af løkken
   Variable: $antal \geq 0$,$r \in \{-1, 1\}$,$i \geq 1$
   Antagelse at invarianten I gælder

   $$I : antal = |\{k \in \{1, 2, .., i-1\} | R(k-1) \neq R(k)\}|$$

Institut for Matematik og Datalogi 23. september 2003
Syddansk Universitet, Odense finie02@imada.sdu.dk

Vi betragter nu if-sætningen indeni løkken og opstiller de mulige input og output af betingelsen i et skema.

$$\text{if}(r * (A[i] - A[i-1]) < 0)$$

r	$A[i] < A[i-1]$	$A[i] > A[i-1]$	$A[i] = A[i-1]$
1	< 0	> 0	$= 0$
-1	> 0	< 0	$= 0$

Hvor tabellens midterfelter viser resultatet af: $r * (A[i] - A[i-1])$

Nu opdager vi et sammenfald mellem betingelsen i if-sætningen og definitionen af retningen $R(i)$ som beskrevet i opgaven.
Vi ser at $A[i] < A[i-1]$ netop svarer til definitionen $R(i) = -1$ og så fremdeles, så vi kan omskrive vores skema således:

r	$R(i) = -1$	$R(i) = 1$	$R(i) = R(i-1)$
1	< 0	> 0	$= 0$
-1	> 0	< 0	$= 0$

Vi husker at betingelsen kun er sand hvis $r * (A[i] - A[i-1]) < 0$, hvilket vi nu kan omformulere til at betingelsen kun er sand hvis $R(i) \neq r$.
Altså bliver $antal$ kun talt én op, og $r = -r$ kun hvis $R(i) \neq r$.

Vi kan nu vise pr. induktion at $r = R(i-1)$ før hver kørsel af løkken:

Basis $i = 1$ og $r = 1$
Ifølge opgavedeteksten indeholder A kun ikke-negative heltal, $A[0] = 0$ og $R(0) = 1$ per definition. Altså $R(i-1) = R(1-1) = R(0) = 1$, så basistilfældet holder.
Induktion $i \geq 1$
r bliver kun opdateret hvis vi passerer if-betingelsen. Som vist ovenfor bliver $r = -r$ hvis og kun hvis $R(i) \neq r$. Det vil sige at r kun bliver ændret hvis $R(i) \neq R(i-1)$ (da $r = R(i-1)$ ifølge induktionsantagelsen).
Hermed kan vi se at

$$R(i) = R(i-1) \Rightarrow r = R(i)$$

og

$$R(i) \neq R(i-1) \Rightarrow r = -R(i-1) = R(i)$$

Herefter inkrementeres i og vores antagelse $r = R(i-1)$ gælder igen inden næste kørsel af løkken.

Efter dette intermediære bevis kan vi bevise I:
Antal inkrementeres hvis og kun hvis if-betingelsen er opfyldt, dvs. hvis $R(i-1) \neq R(i)$

$$\begin{aligned} I_i : antal &= |\{k \in \{1,2,..,i-1\} | R(k-1) \neq R(k)\}| + 1 \\ &= |\{k \in \{1,2,..,i\} | R(k-1) \neq R(k)\}| \\ &\Leftrightarrow I_{i+1} \end{aligned}$$

Altså har vi vist at invarianten gælder både ved initialisering og før hver gennemkørsel af løkken.

(c) Argumenter for at programmet er korrekt
Vi betragter invarianten ved terminering, dvs. $i = n$:

$$antal = |\{k \in \{1, 2, .., n-1\} | R(k-1) \neq R(k)\}|$$

Hermed har vi vist at såfremt algoritmen terminerer er antal netop lig antallet af retningsskift i arrayet $A[0 \ldots n-1]$.
Eftersom programmet terminerer (ifølge a) har vi bevist at algoritmen er korrekt.

2. Cormen et al. 1-1.
Udfyld kun de 12 pladser svarende til $\lg n$, n, n^2, 2^n og 1 sekund, 1 dag, 1 århundrede.

(udeladt med vilje)

3. Cormen et al. 3.1-1, 3.1-3 og 3.1-4.

(udeladt med vilje)

4. Vis, at $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$, hvis a og b er konstanter.
Hint: Brug (3.14) på s. 53 i Cormen et al.

Vi omskriver således:

$$\log_a(n) = \frac{\log_c(n)}{\log_c(a)}$$

$$\log_b(n) = \frac{\log_c(n)}{\log_c(b)}$$

Sætter k_1,k_2:

$$k_1 = \frac{1}{\log_c(a)}$$

$$k_2 = \frac{1}{\log_c(b)}$$

Så vi skal vise at $k_1 \log_c(n) \in \Theta(k_2 \log_c(n))$, hvilket er trivielt da vi ved at man kan se bort fra konstante faktorer i udtryk med Θ.

5. Cormen et al. 3-1a
$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$, $a_d > 0$, k konstant
Vis at hvis $k \geq d$, så er $p(n) = O(n^k)$.

Bruger definitionen af O, Cormen s. 44 midt, og omskriver ligningen

$$\begin{aligned}
p(n) &\leq cn^k \\
(a_d n^d + \ldots + a_0 n^0) &\leq cn^k \\
a_d + \frac{a_{d-1}}{n} \ldots + \frac{a_0}{n^d} &\leq cn^{k-d}
\end{aligned}$$

Nu kan vi f.eks. vælge $c = \sum_{i=0}^{d} a_i$, da vil ligningen være opfyldt for alle $n \geq 1$.

6. 3-2 a, b, e, f.

   Ved at udregne grænseværdien for $\frac{f(n)}{g(n)}$ kan vi udfylde skemaet ud fra definitionerne på ugeseddel 2.

	$f(n)$	$g(n)$	O	o	Ω	ω	Θ	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$
a	$\log_2^k(n)$	n^ϵ	$\surd$	$\surd$	-	-	-	0
b	n^k	c^n	$\surd$	$\surd$	-	-	-	0
e	$n^{\log_2(c)}$	$c^{\log_2(n)}$	$\surd$	-	$\surd$	-	$\surd$	1
f	$\log_2(n!)$	$\log_2(n^n)$	$\surd$	-	$\surd$	-	$\surd$	$\frac{1}{2}$