Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense 25. november 2003
finie02@imada.sdu.dk

DM02 – Opgaver fra ugeseddel 10

Øvelsesopgaver 10/11, 11/11, 12/11 og 13/11

1. Cormen 21.1-2

   Vis at efter alle kanter er blevet behandlet af CONNECTED-COMPONENTS, vil to knuder være i samme sæt hvis og kun hvis de er i samme sammenhængskomponent.

   Definition 'Sammenhængskomponent' B.4 s. 1082
   Sammenhængskomponenter er defineret ved 'is reachable from' relationen over knuderne i grafen. Dvs. x 'is reachable from' y hvis og kun hvis:

   $$\exists\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\} \subseteq E | v_1 = x \wedge v_k = y$$

   Vi kan omformulere sætningen vi ønsker at vise til:

   $$\text{FIND-SET}(x) = \text{FIND-SET}(y) \Leftrightarrow \exists\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\} \subseteq E | v_1 = x \wedge v_k = y$$

   Beviset er i to dele, et for hver vej af afhængigheden $\Leftrightarrow$:

   $\Rightarrow$:

   Vi bemærker først at UNION(x',y'), i linie 5 i koden, kun udføres hvis der er en kant fra x' til y'. Beviset for '$\Rightarrow$' er ved induktion over antallet af knuder i sættet S, $|S|$.
   Induktionsantagelse
   Der er en sti mellem alle knuder som er i samme sæt, dvs.
   x,y er i samme sæt $\Rightarrow$ der er en sti fra x til y.
   Basis
   $|S| = 2$, $S = \{z, w\}$, dvs. S er lavet ved UNION(z,w) så der er en kant $(z, w) \in E$, altså er der en sti (bestående af én kant) fra z til w.
   Induktion
   $|S| \geq 2$, $S = S_1 \cup S_2 = \{z_1, \ldots, w_1, z_2, \ldots, w_2\}$, hvor S er lavet ved en UNION(z_1,z_2), hvor $v_1 \in S_1 = \{v_1, \ldots, w_1\}$ og $v_2 \in S_2 = \{v_2, \ldots, w_2\}$.
   Ved induktionsantagelsen er alle knuder i hhv. S_1, S_2 forbundet af en sti, og da der er en kant $(v_1, v_2) \in E$, så de to sammenhængskomponenter S_1,S_2 bliver forbundet, kan vi konkludere at alle knuder i S er forbundet af en sti.

   $\Leftarrow$:

   x,y er i samme sæt $\Leftarrow$ der er en sti fra x til y
   Der er en sti fra x til y, dvs.

   $$\exists\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\} \subseteq E | v_1 = x \wedge v_k = y$$

   Dvs. at når UNION gentages for hver kant, vil der også udføres UNION(v_1, v_2), UNION(v_2, v_3), ..., UNION(v_{k-1}, v_k), således at alle knuder $\{v_1, \ldots, v_k\}$ kommer i samme sæt $\Rightarrow$ x, y kommer i samme sæt.

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense
finie02@imada.sdu.dk

2. Cormen 21.1-3

   Under kørslen af CONNECTED-COMPONENTS på en ikke-orienteret graf $G = (V, E)$ med k sammenhængskomponeneter,

   - Hvormange gange kaldes FIND-SET?
   - Hvormange gange kaldes UNION?

   FIND-SET
   For hver kant laves to kald til FIND-SET i linie 4 $= 2|E|$

   UNION
   For hver ny knude i kantmængden kaldes UNION én gang, første gang når der er opdaget to nye knuder, minus antallet af sammenhængskomponenter -1 (den første har vi allerede taget højde for) $= |V| - 1 - (k-1) = |V| - k$

3. Opgave 2 fra ugeseddel 10

   Skriv en iterativ version af FIND-SET fra side 508.

   FIND-SET(x)
   $L \leftarrow \emptyset$ ▷ initialiserer tom liste
   $v \leftarrow x$
   while $v \neq p[v]$
       do ▷ tilføj knuden til listen og forsæt op i træet
           ADD(L,v)
           $v \leftarrow p[v]$
   for each $y \in L$
       do ▷ Path-Compression
           $p[y] \leftarrow p[v]$
   return $p[v]$

4. Opgave 3 fra ugeseddel 10

   (Udeladt med vilje)

5. Opgave 4 fra ugeseddel 10

   Vis at rangen af en knude er en øvre grænse for dens højde.

   > **Definition 'Height of a node in a tree'** s. 1088
   > $Height(x) =$ The number of edges on the longest simple downward path from x to a leaf.
   > $Height(x) = 0$ if x is a leaf.

   Beviset er ved induktion over antallet af knuder i træet.

   Basis $n = 1$
   For et træ bestående af én knude er rang lig 0, og højde er lig 0. $\Leftrightarrow$ rang $\leq$ højde. OK

   Induktion $n \geq 1$
   Givet et træ t sammensat ved LINK(x, y). For hvert undertræ x,y gælder induktionsantagelsen rank $\leq$ height.
   Vi ser på to tilfælde:

   I: rank(x) $>$ rank(y)

25. november 2003
finie02@imada.sdu.dk

y sættes under x, så x bliver rod i det nye træ t.
Rank ændres ikke.

$$\begin{aligned} Height(x) &= max\{Height(x), Height(y)+1\} \\ &\leq max\{Height(x), rank(y)+1\} \\ &= Height(x) \text{ , da } rank(y)+1 \leq rank(x) \leq height(x) \end{aligned}$$

II: rank(x) $=$ rank(y)

x sættes under y, $rank(y)' \leftarrow rank(y)+1$.

$$\begin{aligned} Height(y) &= max\{Height(y), Height(x)+1\} \\ &\leq max\{rank(y)', rank(x)+1\} \\ &= rank(x)+1 \\ &\Updownarrow \\ rank(y)' &\leq Height(y) = rank(x)+1 \end{aligned}$$

6. Cormen 21.3-1

   (udeladt med vilje)

7. Cormen 21.3-3

   (udeladt med vilje)

8. Cormen 21.4-2

   (udeladt med vilje)

9. Cormen 21.4-4

   (udeladt med vilje)

10. Eksamen Juni 1997 opgave 3

    (udeladt med vilje)